114. 無限聯立一次方程式ニツイテ (I)

京都工專　花井七郎 (1947.8.1)

無限聯立一次方程式ヲ解ク場合ニ所謂截片方法ニヨルノガ最モ自然デアルト思ハレル. F. Riesz [1] ノ著書ニ截片方法デ求メタ結果ガ原ノ聯立一次方程式ヲ満足シナイ例ガ載ッテヰル. 此処デハ G. Köthe, O. Toeplitz [2] ガ論ジタ線狀座標空間ニ於テ定義サレタ無限聯立一次方程式ガ截片方法デ解ケルタメノ條件ヲ求メテ見ル. 簡單ノタメニ記号, 定義等ハ Köthe, Toeplitz ニ從フコトトスル.

無限聯立一次方程式 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} y_k = x_i, \ (i=1,2,\cdots)$ ·······(1)

ニテ $y=(y_1, y_2, \cdots)$, $\mathfrak{z}=(x_1, x_2, \cdots)$ ハ夫々或線狀座標空間 λ, μ ノ点トスル. 而シテ無限行列ヲ $\mathfrak{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \end{pmatrix}$ トスルトキ (1) ヲ $\mathfrak{A}y=\mathfrak{z}$ ト書クコトニスル.

今 $\mathfrak{A}$ ニ於テ. 各行 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots)$ ヲ座標トスル点ハ λ ノ共軛空間 (dual) λ^* ノ点トシ. $\mathfrak{A}$ ノ第 n_i 截片ヲ

$$\mathfrak{A}_{n_i}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n_i} & \\ & \cdots\cdots & & & 0 \\ a_{n_i1} & a_{n_i2} & \cdots\cdots & a_{n_in_i} & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right)$$ トスル.

但 $\{n_i\}$ ハ $\{n\}$ ノ部分列トスル.

又 $\mathfrak{z}$ ノ第 n_i 截片ヲ $\mathfrak{z}_{n_i}=(x_1, x_2, \cdots, x_{n_i}, 0, 0, \cdots)$ トスル. $\mathfrak{A}_{n_i}$ ノ行列式 $|\mathfrak{A}_{n_i}| \neq 0 \quad (i=1,2,\cdots)$ ナルトキハ $\mathfrak{A}_{n_i}y=\mathfrak{z}_{n_i}$ ノ解 $y^{(n_i)}=(y_1^{(n_i)}, y_2^{(n_i)}, \cdots\cdots y_{n_i}^{(n_i)}, 0, 0, \cdots)$ ハ求メラレル. 今点列 $\{y^{(n_i)}\}$ ノ部分列 $\{y^{(n_j)}\}$ ガアッテ. ソノ各座標ノ極限値即チ $\lim_{n_j \to \infty} y_k^{(n_j)}=y_k \ (k=1,2,\cdots)$ トスルトキ点 $(y_1, y_2, \cdots)$ ガ λ ノ点デアッテ而モ方程式 (1) ヲ満足スルトキ (1) ハ截片方法デ解ケルト云フコトニスル.

〔定理 1〕 線狀座標空間 λ ハ局所弱コムパクトトシ. μ ハ任意ノ線狀座標空間トスル $|\mathfrak{A}_{n_i}|=0$. $n_i \to \infty$ (但シ $\{n_i\}$ ハ $\{n\}$ ノ部分列トスル)

ニシテ、$\mathfrak{A}_{n_i}$ ノ逆行列ヲ $\mathfrak{A}_{n_i}^{-1}$ トスルトキ $\{\mathfrak{A}_{n_i}^{-1}\mathfrak{z}\}$ ガ空間 λ ノ beschränkt（有界）ナ点列デアル如キ任意ノ $\mathfrak{z}\in\mu$ ニ對シテ $\mathfrak{A}\mathfrak{y}=\mathfrak{z}$ ノ解 $\mathfrak{y}\in\lambda$ ハ截片方法デ求メラレル.

〔証　明〕 $\{\mathfrak{A}_{n_i}^{-1}\mathfrak{z}\}$ ハ λ ノ beschränkt ナ点列デアルカラ. λ ノ局所弱コムパクト性カラ. $\{\mathfrak{A}_{n_i}^{-1}\mathfrak{z}\}$ ノ部分列ガ存在シテ λ ノ点 $\mathfrak{y}=(y_1, y_2, \cdots)$ ニ弱收斂スル. 初メカラ $\{\mathfrak{A}_{n_i}^{-1}\mathfrak{z}\}$ ガ $\mathfrak{y}$ ニ弱收斂スルトシテ差支ヘナイ.
今 $\mathfrak{A}_{n_i}^{-1}\mathfrak{z}=\mathfrak{y}^{(n_i)}=(y_1^{(n_i)}, y_2^{(n_i)}\cdots\cdots, y_{n_i}^{(n_i)}, 0, 0, \cdots\cdots)$ トスレバ, 点列 $\{\mathfrak{A}_{n_i}^{-1}\mathfrak{z}\}$ ガ $\mathfrak{y}$ ニ弱收斂スルカラ $\lim_{n_i\to\infty} y_k^{(n_i)}=y_k$ ($k=1, 2\cdots\cdots$) 而シテ $\mathfrak{z}=(x_1, x_2, \cdots\cdots)$ トスレバ.

$$\begin{cases} a_{11}y_1^{(n_i)}+a_{12}y_2^{(n_i)}+\cdots\cdots+a_{1n_i}y_{n_i}^{(n_i)}=x_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n_i1}y_1^{(n_i)}+a_{n_i2}y_2^{(n_i)}+\cdots\cdots+a_{n_in_i}y_{n_i}^{(n_i)}=x_{n_i} \end{cases} \quad (i=1.2.\cdots)$$

$\mathfrak{A}$ ノ第 l 行ヲ座標トスル点ヲ $\check{\mathfrak{u}}_l=(a_{l1}, a_{l2}, \cdots\cdots)$ トスレバ

$\check{\mathfrak{u}}_l$ $\mathfrak{y}$（弱）テアツテ　且ツ $\check{\mathfrak{u}}_l\in\lambda^*$ デアル.

$$\therefore\quad \check{\mathfrak{u}}_l\mathfrak{y}=x_l \qquad (l=1, 2, \cdots\cdots)$$

$$\therefore\quad \mathfrak{A}\mathfrak{y}=\mathfrak{z}$$

〔証終〕

次ニ　空間 λ ガ特ニ空間 ω（即チ各座標ハ任意ノ数トスル点ヨリナル空間）ノトキハ〔定理〕1 ノ條件ハ又必要條件トナルコトガ云ヘル. 即チ

〔定理〕2. $\mathfrak{A}$ ノ l 行ヲ座標トスル点ハ ω ノ共軛空間 ω^* ノ点（即チ有限個ノ座標ノミガ 0 デナイ）トスル. $|\mathfrak{A}_{n_i}|\neq 0$ $(n_i\to\infty)$ ガ成立スルトキハ方程式 $\mathfrak{A}\mathfrak{y}=\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}\in\mu$ ノ解 $\mathfrak{y}\in\omega$ ガ截片方法デ求メラレルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ $\{\mathfrak{A}_{n_i}^{-1}\mathfrak{z}\}$ ガ beschränkt ナ部分列ヲ持ツコトデアル.（勿論 ω ノ点列トシテデアル）

〔証明〕 十分ナルコト. 空間 ω ハ局所弱コムパクトデアル[3]カラ〔定理〕1 ヨリ明カデアル.

---

1) F. Riesz; Les systèmes d'équations linéaires a une infinité d'inconnues　P. 23

2) G. Köthe. O. Toeplitz: Journ. für Math. 171 (1934) P. 193-226

3) G. Köthe; Math. Ann. 114 (1937) p. 105

ニシテ、a_{n_i} ノ逆行列ヲ $\mathfrak{a}_{n_i}^{-1}$ トスルトキ $\{\mathfrak{a}_{n_i}^{-1}\mathfrak{b}\}$ ガ空間λノ beschränkt（有界）ナ点列デアル如キ任意ノ $\mathfrak{b}\in\mu$ ニ對シテ $\mathfrak{a}\mathfrak{y}=\mathfrak{b}$ ノ解 $\mathfrak{y}\in\lambda$ ハ截片方法デ求メラレル.

〔證明〕 $\{a_{n_i}^{-1}\mathfrak{b}\}$ ハλノ beschränkt ナ点列デアルカラ、λノ局所弱コムパクト性カラ、$\{a_{n_i}^{-1}\mathfrak{b}\}$ ノ部分列ガ存在シテλノ点 $y=(y_1, y_2, \cdots)$ ニ弱收斂スル. 初メカラ $\{\mathfrak{a}_{n_i}^{-1}\mathfrak{b}\}$ ガ $\mathfrak{y}$ ニ弱收斂スルトシテ差支ヘナイ.

今 $\mathfrak{a}_{n_i}^{-1}\mathfrak{b}=\mathfrak{y}^{(n_i)}=(y_1^{(n_i)}, y_2^{(n_i)}, \cdots, y_{n_i}^{(n_i)}, 0, 0, \cdots)$ トスレバ、点列 $\{a_{n_i}^{-1}\mathfrak{b}\}$ ガ $\mathfrak{y}$ ニ弱收斂スルカラ $\lim\limits_{n_i\to\infty} y_k^{(n_i)}=y_k$ ($k=1, 2\cdots$) 而シテ $\mathfrak{b}=(x_1, x_2, \cdots)$ トスレバ、

$$\begin{cases} a_{11}y_1^{(n_i)}+a_{12}y_2^{(n_i)}+\cdots\cdots+a_{1n_i}y_{n_i}^{(n_i)}=x_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n_i1}y_1^{(n_i)}+a_{n_i2}y_2^{(n_i)}+\cdots\cdots+a_{n_in_i}y_{n_i}^{(n_i)}=x_{n_i} \end{cases} \quad (i=1, 2, \cdots)$$

$\mathfrak{a}$ ノ第 l 行ヲ座標トスル点ヲ $\check{u}_l=(a_{l1}, a_{l2}, \cdots)$ トスレバ

$\check{u}_l\mathfrak{y}$（弱）テアツテ 且ツ $\check{u}_l\in\lambda^*$ デアル.

$$\therefore\quad \check{u}_l\mathfrak{y}=x_l \qquad (l=1, 2, \cdots)$$

$$\therefore\quad \mathfrak{a}\mathfrak{y}=\mathfrak{b}$$

〔証終〕

次ニ 空間λガ特ニ空間ω（即チ各座標ハ任意ノ数トスル点ヨリナル空間）ノトキハ〔定理〕1ノ條件ハ又必要條件トナルコトガ云ヘル. 即チ

〔定理〕2. $\mathfrak{a}$ ノ l 行ヲ座標トスル点ハ ω ノ共軛空間 ω^* ノ点（即チ有限個ノ座標ノミガ0デナイ）トスル. $|\mathfrak{a}_{n_i}|\neq 0$ $(n_i\to\infty)$ ガ成立スルトキハ方程式 $\mathfrak{a}\mathfrak{y}=\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\in\mu$ ノ解 $\mathfrak{y}\in\omega$ ガ截片方法デ求メラレルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ $\{\mathfrak{a}_{n_i}^{-1}\mathfrak{b}\}$ ガ beschränkt ナ部分列ヲ持ツコトデアル.（勿論 ω ノ点列トシテデアル）

〔証明〕 十分ナルコト. 空間ωハ局所弱コムパクトデアル[3]カラ〔定理〕1ニヨリ明カデアル.

---

1) F. Riesz; Les systèmes d'équations linéaires a une infinité d'inconnues P.23

2) G. Köthe. O. Toeplitz: Journ. für Math. 171 (1934) P.193-226

3) G. Köthe; Math. Ann. 114 (1937) p.105

<u>必要ナルコト</u> 或ル方法デ解ガ求メラレルトスル. クルトキハ $\{n_i\}$ ノ部分列 $\{n_j\}$ ガ存在シテ. $\{\mathfrak{a}_{n_j}^{-1}\mathfrak{b}\}$ ガ $n_j \to \infty$ ノトキ. 座標的ニ ω ノ一点ニ收斂スル. 然ルニ ω ニ於テハ座標的ニ收斂スルコトト弱收斂スルコトハ同値デアルコトハ容易ニ証明サレル. 故ニ $\{\mathfrak{a}_{n_j}^{-1}\mathfrak{b}\}$ ハ *beschränkt* [4] デアル

［証 終］